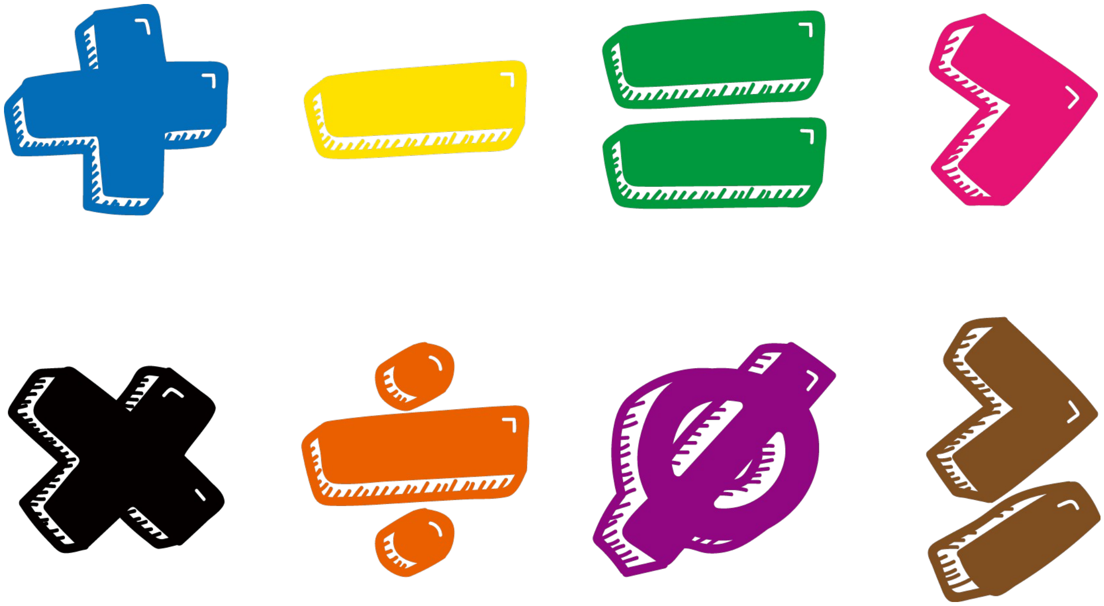

Breve historia de los símbolos matemáticos

Iván de Jesús Arellano Palma

Siempre que pienso en historia
viene a mi cabeza Adrián Velasco Aguilar,
el mejor historiador que conozco.
Para ti, querido amigo.

Resumen

Estamos acostumbrados a ver en los libros de matemáticas una sucesión de símbolos que si uno está desconectado de esa disciplina, pueden causar animadversión. Abrir un libro de matemáticas y no comprender puede equipararse a abrir un libro en chino y no conocer los ideogramas. Pero aunque el lector no lo crea los símbolos ayudan a una mejor comprensión y disfrute de las matemáticas. Este artículo trata sobre el paso de la aritmética y el álgebra explicadas a su simbolización y por ende a su abstracción. Como al escribir sobre historia siempre hay peligro de dejar fuera a protagonistas que contribuyeron de manera significativa en el avance del conocimiento, cualquier omisión grave es mi responsabilidad.

¿Qué símbolos se utilizan más en matemáticas?

La mayor parte de las ideas fundamentales en ciencia son esencialmente simples, y deben, como regla, ser expresadas en un lenguaje que cualquiera pueda comprender.

Albert Einstein

No me cabe duda que la matemática es un lenguaje. Si un lector cualquiera abre las páginas de un libro de matemáticas encontrará un sinfín de expresiones simbólicas y sucede lo mismo con la química. Estas expresiones simbólicas sirven para captar la esencia del pensamiento matemático que es operar con ellas. Al igual que con los distintos elementos gramaticales de cualquier lengua (sujeto, verbo, complemento, preposiciones y conjunciones) se forman oraciones, con los símbolos matemáticos se hacen demostraciones. Entre los símbolos más usados está igual (=) con 94% de apariciones en las expresiones matemáticas. Lo inventó en 1557 el matemático galés Robert Recorde pues para él no había nada más igual que dos líneas rectas paralelas de la misma longitud. Después con 59% de apariciones sigue el paréntesis (apertura y cierre) que ayuda a organizar operaciones y evitar errores de ambigüedad. Según las estadísticas del sitio arXiv, https://arxiv.org/archive/math, los símbolos que más aparecen en las expresiones aritméticas son las letras latinas, 36%; los operadores matemáticos que indican adición o sustracción, 15%; los operadores relacionales que indican que algo es menor o mayor que otra cosa, 7%; los números, 13%; las flechas 3% y los símbolos de puntuación, 6%. Las letras del alfabeto grecolatino más frecuentes en libros de matemáticas, técnicos y de ingeniería son: *n*, *i* y *x* en los primeros, *y x* y *n* en los de ingeniería. Todas estas letras representan variables, por ejemplo *i* y *n* se utilizan en expresiones con subíndices y en sucesiones.

Ahora toda esta simbología nos parece normal, pero no siempre fue así y es de lo que quiero hablar en este artículo.

Matemáticas retóricas, anotadas y simbólicas

No siempre se utilizaron los símbolos matemáticos. Los historiadores de la matemática dividen esta disciplina en tres etapas: las matemáticas retóricas, las anotadas también llamadas sincopadas, un híbrido entre las retóricas y las modernas, y la moderna matemática simbólica. En las páginas del libro *Álgebra* del árabe Al-Khwārizmī (ca. 780-850 d.C.)

podemos ver el álgebra como una forma de plantear y solucionar problemas.

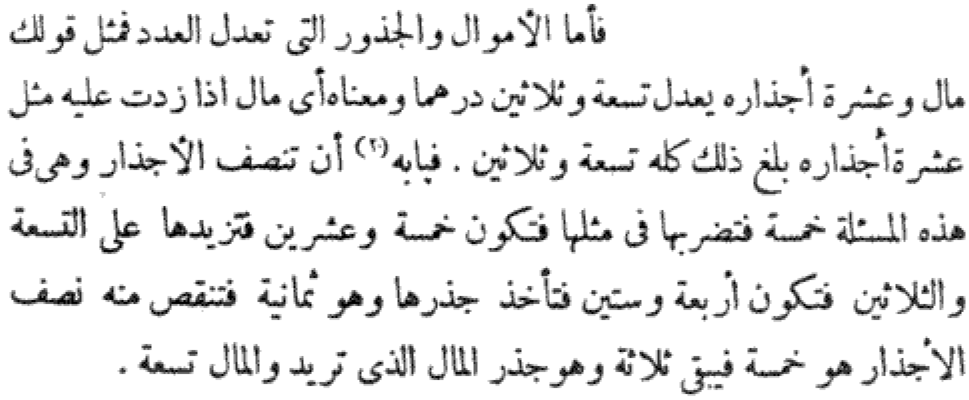
فأما الأموال والجذور التي تعدل العدد فمثل قولك
مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما ومعناه أي مال اذا زدت عليه مثل
عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين . فبابه(٢) أن تنصف الأجذار وهي في
هذه المسألة خمسة فتضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة
والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف
الأجذار هو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريد والمال تسعة .

Figura 1. *Texto de una edición árabe de su álgebra (El Cairo, 1968) donde se explica cómo resolver la ecuación x^2 + 10x = 39. Figura tomada de: http://bit.ly/2YLNy9K*

Pero no tenemos que ir tan lejos para ver este tipo de ejemplos. Normalmente los divulgadores recurrimos al álgebra explicada para atraer a los lectores y evitar, como le recomendó el editor de Stephen Hawking en su primer libro de divulgación llamado *Breve historia del tiempo*, que el público huya. Otro ejemplo lo encontramos en el libro del físico español David Blanco de 2012, titulado *Schrödinger. Las paradojas cuánticas* donde para explicar qué es una ecuación y su significado escribe: “¿Qué cosa multiplicada por sí misma más la propia cosa da tres como resultado?”. Pues bien esa expresión hoy en día la encontraríamos en un libro de álgebra así: $x^2+x=3$. Pero antes de que François Viete, Diofanto y otros introdujeran los símbolos en las matemáticas, los textos antiguos de matemáticas de los egipcios o de los árabes seguían el ejemplo de Blanco y no utilizaban símbolos o hacían un uso mínimo de ellos. Por ejemplo el libro del matemático italiano renacentista Luca Pacioli está escrito de este modo siguiendo la tradición de Al-Khwārizmī. Hoy no esperamos abrir un libro de matemáticas y encontrar una explicación como la de Blanco o Pacioli.

Aquí vale la pena aclarar que la matemática de los autores citados tenía un objetivo distinto al de la matemática moderna. Ahora se espera encontrar más símbolos que letras porque ellos indican distintas relaciones y correlaciones: variables, constantes, igualdades, desigualdades (mayor que o menor que), etcétera. Estos símbolos ayudan a pensar y a manejar los operadores de forma más sencilla.

Por otra parte si se escribe la matemática con lenguaje natural la extensión de los textos sería abrumadora. La simbología moderna de las matemáticas posibilita gran economía y capacidad de abstracción. Para entender lo anterior piense el lector en las ecuaciones que aprendió en la educación básica. Con ellas podemos representar igualdades entre dos expresiones, cantidades, objetos, fenómenos, etcétera. La historia del paso de las matemáticas retóricas, en especial de la aritmética y el álgebra, a las simbólicas es fascinante pues convergen factores históricos, sociales, económicos y esfuerzos notables de matemáticos y físicos durante muchos siglos.

El legado de Fibonacci. Las cifras indoarábigas y la aritmética

"La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas", nos decía el príncipe de las matemáticas Gauss. El origen de las matemáticas se remonta a los primeros conocimientos aritméticos, es decir, a la invención de los números y las operaciones entre ellos. Lo que aprendemos en la educación básica es el sistema posicional de los números naturales y sus operaciones: la adición y la sustracción.

Somos herederos del sistema indo-arábigo; el sistema posicional que usamos se difundió primero de Babilonia a la India y no todos los sistemas matemáticos en el mundo contaban con él, la aritmética romana no lo tenía y su sistema más bien era aditivo. En Babilonia se usaba un sistema que empleaba el número 60 como base de los cálculos matemáticos porque entre varías ventajas poseía muchos divisores. En nuestra cultura quedan vestigios de este sistema en la medición del tiempo. El cambio a la base 10 se hizo en la India para simplificar los cálculos matemáticos. Los árabes adoptaron la forma de hacer matemática de los indios y por ende hoy en día hablamos del sistema indo-arábigo para reconocer la aportación de esos dos centros culturales. Por otro lado los árabes introdujeron este tipo de cifras en España entre los siglos VIII y XV y así se abrieron paso lentamente por toda Europa.

En Venecia poco antes del Renacimiento, en el siglo XIII, surgió la primera generación de obras matemáticas y no fue casual pues era el punto de contacto con el Oriente y uno de los centros mercantiles más *importantes de Europa. Allí surgieron las primeras escuelas de contabilidad cuyos sistemas aplicaban dobles entradas: una de débitos y otra de créditos. Surgieron allí también las escuelas de ábaco y Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci (posiblemente lo conozcas por las famosas series de Fibonacci) con su obra Liber abaci* (Libro de los cálculos) que popularizó las cifras indo-arábigas (figura 2).

Esta obra fue sin duda una de las más influyentes en la historia de la matemática y comienza así: "Las nueves cifras indias son 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1". Fibonacci no se olvida del cero pero lo añade como zephir *o cifra*,

y con esto inicia la popularización de la notación indo-arábiga tan superior a la romana a la hora de calcular. En los primeros capítulos del libro se cubre todo lo que hoy aprendemos en los primeros años de la primaria, es decir, la representación de números de manera posicional. En los últimos capítulos se estudia el cálculo de proporciones, operaciones con fracciones donde Fibonacci escribiría 1/3 4 y no 4 1/3 como hoy, es decir la fracción antes que el entero, y soluciones a ecuaciones de primer grado como 6x+21=29. Todo esto explicado de manera verbal con palabras y más palabras, intercaladas entre números y fracciones.

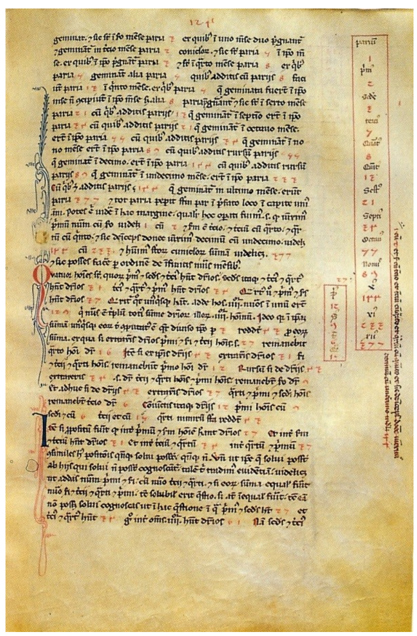

Figura 2. *Página del Liber abaci. El ejemplar se encuentra resguardado en la Biblioteca Nacional de Florencia, Italia. Imagen tomada de Wikipedia*

Sin lugar a dudas, el Liber abaci fue un libro que transformó al mundo. Los métodos tratados en el libro fueron estudiados en escuelas donde se formaban los maestros calculistas (*scoule d'abaco*) que llegaron a tener de ocho a diez mil alumnos. Por ese trabajo, Leonardo de Pisa, que había nacido en una familia de mercaderes, logró hacerse famoso en vida además de obtener una pensión anual de 20 liras "como pago del trabajo que ha invertido y para que siga apoyando a la ciudad de Pisa y a sus funcionarios en la práctica del cálculo".

La cruz para la multiplicación y su historia

San Andrés vivió en el primer siglo de nuestra era. Él y su hermano San Pedro se convirtieron en apóstoles cuando Jesús los convocó a convertirse en sus seguidores. A San Andrés lo torturaron los romanos y lo crucificaron en Roma en una cruz distinta a la de Jesucristo pues él mismo consideraba que no hubiera merecido tal honor. Cuando en la Edad Media las ciudades competían por poseer reliquias de santos, como relata Umberto Eco en *Baudolino*, trasladaron los restos de San Andrés a Escocia. En esa época Escocia era católica y la leyenda dice que la cruz de San Andrés apareció en el cielo antes de una victoria de un rey escocés contra los infieles. Por ello se veneró a San Andrés y su cruz fue incorporada a emblemas escoceses como la bandera y a la Union Jack británica –the Union Flag– (ver figura 3) que reúne tres cruces: la de San Patricio de los irlandeses, la de San Jorge de los ingleses y la de San Andrés, de los escoceses.

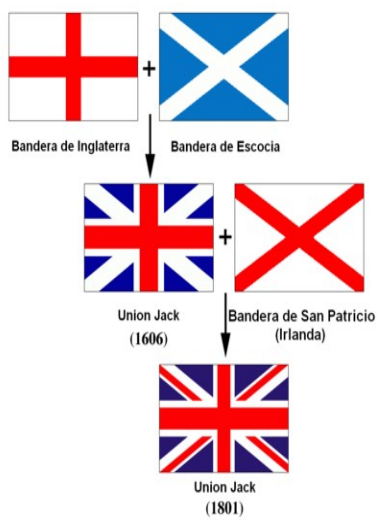

Figura 3. *La bandera del Reino Unido reúne las tres banderas: de Escocia, Inglaterra e Irlanda. La de Escocia es la que ocupamos para la multiplicación. Existen varias teorías para explicar lo de "Union Jack", pero la mayoría proponen que el nombre Jack se deriva de la utilización de la palabra "cat" (gato) en diminutivo. Figura tomada de: https://www.guioteca.com/mitos-y-enigmas/cual-es-el-origen-de-la-union-jack-asi-nacio-la-bandera-mas-famosa-del-mundo/*

No existe certeza absoluta de cómo la cruz de San Andrés o *decusata*, es decir, en forma de aspa, llegó a las matemáticas. Pudo deberse a que era un elemento tipográfico arquetípico en la cultura cristiana o a su origen antiguo o a que no se había utilizado como elemento matemático. Lo que sí se sabe fue que el primero en utilizarla fue el matemático y pedagogo inglés William Oughtred en su libro *Clavis mathematicae* (La llave de las matemáticas) publicado en 1631. Ese libro se usó para difundir los métodos algebraicos en boga. No fue el único símbolo operativo que propuso Oughtred, pero de ellos los únicos que se utilizan hasta hoy son los de proporcionalidad y la x de multiplicación. Se cree que el matemático y pedagogo utilizó la x porque no tenía ninguna connotación matemática anterior. Leibniz y sus seguidores usaban una C rotada 90 grados para indicar la multiplicación. La cruz de San Andrés se popularizó en toda Europa y hoy es uno de los símbolos más usados y conocidos de la aritmética y el álgebra.

Como dice el matemático mexicano-alemán Raúl Rojas González, citado en la bibliografía, cada vez que hagamos multiplicaciones pensaremos en siglos de historia desde el cristianismo, en la cruz de San Andrés, en las batallas en Escocia y en la Union Jack británica.

El álgebra sincopada o intermedia

“Encuentre el valor de X” es una de las frases más temidas por los alumnos. Estamos tan acostumbrados a que X sea la incógnita que incluso si se nos pide que resolvamos la ecuación $ax-b=0$, ni lo dudamos, resolvemos para X, aunque a o b pueden ser también la incógnita. ¿De dónde viene esta convención? Podríamos pensar que el álgebra es una disciplina muy antigua, pero su maduración llevó siglos. El álgebra a la que nos estamos refiriendo es la moderna, pues esta rama de las matemáticas, según varios especialistas tiene significados diferentes según la época que se analice: una es el álgebra de Al-Khwārizmī, otra la de Fibonacci, otra la de Viète o la de Cardano y otra la que utiliza Newton. Todas son diferentes en su problemática. Esto ya ha sido señalado por varios autores como Hoyrup, Crowe, Andrè Weil, Mahoney, etc.”[1] Como ya vimos, en el siglo XII la aritmética no contaba con una simbología estándar y mucho menos el álgebra. Fue hasta el siglo XIX cuando se pudieron algebraizar completamente las matemáticas.

[1] Estas palabras no son mías. Corresponden al Mtro. Rafael Martínez de la UNAM

Uno de los pioneros en utilizar una notación simbólica fue Diofanto de Alejandría (c. 200/214 d.C., y fallecido c. 284/298 d. C.), por lo que se le ha considerado el padre del álgebra. De su vida se sabe poco ya que existen escasas referencias históricas confiables. Pero su libro *Arithmética* es la segunda obra matemática más importante de la antigüedad después de los *Elementos* de Euclides. Incluso se sabe que hacia el año 1630 Pierre de Fermat decidió hacer un pequeño cambio en el octavo problema de la *Arithmetic*a: descomponer un número al cuadrado como la suma de otros dos números al cuadrado Si cambiamos el cuadrado por cubos nace el problema o conjetura de Fermat, uno de los problemas matemáticos más famosos, hoy ya un teorema porque Andrew Wiles lo resolvió en 1996.

La obra *Arithmética* se conservó en lugares como Persia, donde fue traducida al árabe en el siglo X. Hoy existen seis volúmenes en griego y cuatro en árabe de los 13 originales y se han hecho varias reediciones. En estos textos Diofanto resuelve ecuaciones de segundo y tercer grado y formula conjeturas, entre otras cosas. Pero lo más importante es que Diofanto ya utilizaba en la *Aritmética* una notación simbólica de letras griegas para representar números o el cuadrado o el cubo de la incógnita.[2] Diofanto ya utilizaba una letra para la incógnita, la letra sigma. Antes no se hallaba la X sino S –sigma–. Me animo a decir que la suya fue un álgebra intermedia entre retórica y simbólica que en inglés se llama sincopada. Pero a Diofanto, al contrario que a Euclides, lo olvidaron y su saber se perdió durante siglos hasta el siglo X cuando los árabes lo redescubrieron.

***Vive la France* y el álgebra moderna**

Durante mucho tiempo Francia fue el lugar indicado para hacer matemáticas. Esta apuesta por el conocimiento fue parte de la Revolución Francesa (1789) cuyos ecos resuenan todavía hasta nuestros días. German, Lagrange, Fourier, Galois, Cauchy y Laplace fueron grandes matemáticos de esa época. Pero desde antes Francia contaba con buenos matemáticos que revolucionaron esta rama del conocimiento. La notación del abogado, político y matemático lego François Viete fue

[2] Tomo lo anterior del libro llamado El precursor del lenguaje aritmético. Diofanto. La colección es la RBA.

tan importante para el álgebra que se le considera su segundo padre. En su obra *Isagoge in artem analyticam* de 1591, Viete ya trabaja con números (logística numerosa), pero también con símbolos (logística speciosa), lo que es la base del álgebra moderna. Con lo anterior me refiero a que Viete escribía *A cubum* o *A quadratum* cuando se quería referir a A^2 y A^3 respectivamente. En ese mismo texto Viete utilizó las consonantes latinas para representar constantes y vocales para las variables. Aunque Viete en el texto sigue trabajando con la retórica y los símbolos no aparecen tan frecuentemente, *Isagoge* fue el inicio del álgebra moderna. Sólo después de su trabajo se pudieron formalizar y clarificar varios procedimientos de resolución que permanecían ambiguos; por ejemplo la solución a las ecuaciones de primer hasta cuarto grado.

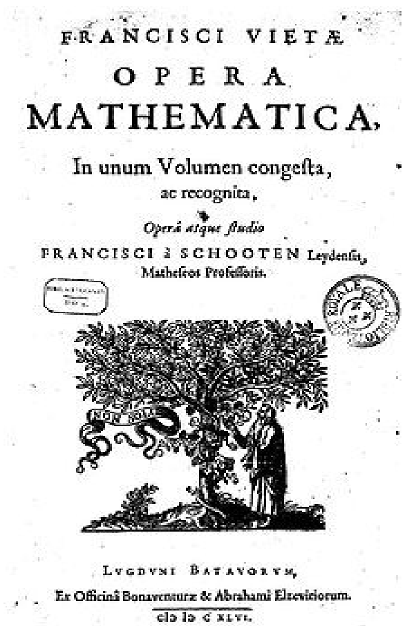
FRANCISCI VIETÆ
OPERA
MATHEMATICA,
In unum Volumen congesta,
ac recognita,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN Leydensis,
Matheseos Professoris.
NON SOLIS
LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ Bonaventuræ & Abrahami Elzeviriorum.
clɔ Iɔ c XLVI.

Figura 4. *Portada del libro de François Viete. Tomada de Wikipedia.*

Descartes fue la estrella que afianzó y popularizó una notación algebraica que con algunas excepciones es la moderna. Su *Géométrie* (figura 5) se lee como un libro moderno de álgebra, la obra se divide en tres libros. En ella ya tenemos la notación actual para las potencias, la variable x se consolida y se utilizan las primeras letras del alfabeto para las constantes y las coordenadas que hoy llamamos cartesianas. Lo anterior se encuentra en el libro 1: "Los problemas que pueden construirse solamente con círculos y rectas". Por si fuera poco creó la geometría analítica que disolvió la tensión teórica entre la geometrización y algebraización de las matemáticas. Con ella podemos abordar problemas geométricos expresados con álgebra y los problemas algebraicos se pueden reducir a la geometría. Descartes une en mi opinión de manera brillante el legado de Euclides con el de Diofanto.

Por último, porque como en todo relato histórico siempre hay gente brillante que es relegada, no quisiera terminar sin mencionar a Thomas Harriot que en su libro *Artis analyticae praxis* también utilizaba letras para expresar cantidades, y al holandés Frans van Schooten quien difundió por toda Europa el libro de Descartes y aportó explicaciones brillantes sobre la geometría analítica.

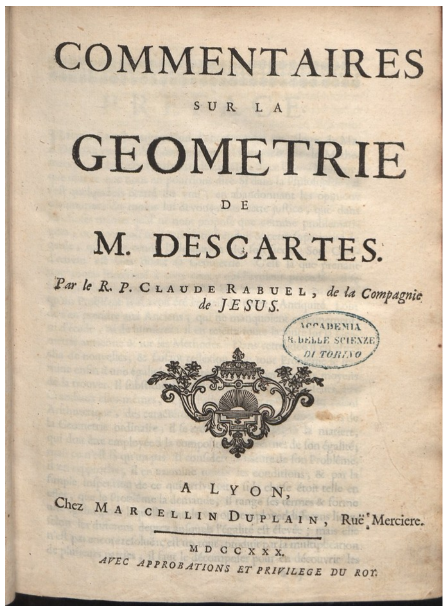

Figura 5. *La géométrie de René Descartes. Tomado de Wikipedia*

Lo que siguió al libro de Descartes y la geometría analítica es una historia matemática exquisita. Se desarrollaron una serie de ramas de la matemática, entre ellas el cálculo diferencial e integral, las funciones (debido a las coordenadas cartesianas), etcétera. Pero eso ya es otra historia, la nuestra desde Alejandría a los filósofos y abogados franceses, ha terminado.

Historia, ¿para qué?

Conviene que todos los ciudadanos entren en contacto con la verdadera matemática, que es método, arte y ciencia, muy distinta de la calculatoria, que es técnica y rutina.

Felix Klein

Galileo desde 1642 nos enseñó que "el mundo de la naturaleza está escrito en matemáticas". Aunque rara vez nos adentramos en la historia de las matemáticas y sus símbolos, esto representa varias pérdidas; quizá las más importantes sean culturales, históricas, económicas y políticas y por otro lado de comprensión y contenido matemático, pues estoy convencido, y así lo muestra también la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática IMU, que si se conoce de dónde provienen tales conceptos y simbología, se está más preparado para usar mejor nuestro bagaje matemático. Aquí intentamos mostrar un panorama general del esfuerzo colectivo de siglos para forjar una simbología matemática práctica y abstracta para esta disciplina que busca expresar relaciones precisas entre diversas estructuras, cada vez con una mayor abstracción. Esta es la forma de entender las matemáticas que persiste hoy día y que busca puntos de vista unificadores.

Agradezco los atinados comentarios del Prof. Rafael Martínez Enríquez y de la Dra. Carmen Curcó Cobos que mejoraron ampliamente el presente artículo.

Bibliografía

Especializada

Boyer, C., *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 2007.

Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations*, 2 vols., Open Court Company, Chicago, 1928.

Devlin, Keith, *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*, Walker Books, Londres, 2012.

Ifrah, Georges, *A universal History of Numbers: From Prehistory to Computers*, Wiley, Nueva York, 2000.

Tamayo y Salmorán, Rolando, *La Universidad Epopeya Medieval*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2005.

Divulgación

Blanco, David, Schrödinger. *Las paradojas cuánticas. El universo está en la onda*, RBA, Buenos Aires, 2012.

Hersch, R., John-Steiner, V., *Matemáticas: una historia de amor y odio*, Barcelona, Drakontos, 2012.

Prieto, Castro, *Lo imposible en matemáticas*, FCE, La ciencia para todos, 2018.

Rojas González, Raúl, *El lenguaje de las matemáticas. Historia de sus símbolos*, FCE, México, 2018.