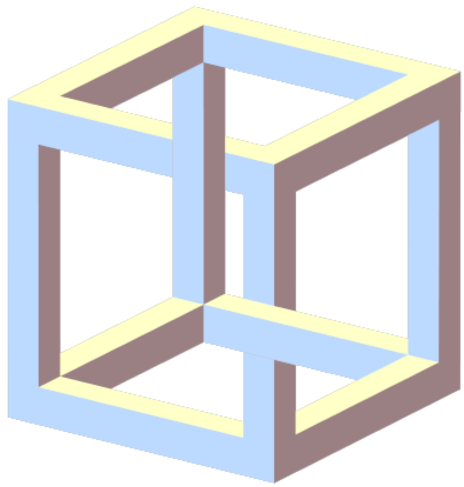

Fuente: http://nico.maisonneuve.free.fr/blog/index.php/2010/the-tragedy-of-democratic-voting-systems/

# ¿Puede la democracia estar en un error?

Fernando Vázquez Bravo

*La democracia es la peor forma de gobierno, excepto por todas las otras formas que han sido probadas de vez en cuando.*

Winston Churchill

## La paradoja del voto

Antes de continuar regresemos el tiempo y cambiemos de continente: ahora estamos en la Francia de la segunda mitad del siglo XVIII (1785). Nicolás de Condercet es un matemático y filósofo que tiene un fuerte interés en la política, en particular en el problema del voto.

Condercet realizó estudios sobre la confiabilidad de la elección de una propuesta partidaria y las paradojas que podía albergar un sistema de votos por mayoría, como el que existe en México. En términos generales la paradoja de Condercet plantea la posibilidad de que en un sistema en el cual gana quien más votos tenga, las preferencias individuales de la mayoría de los votantes pueden no ser reflejadas de manera inequívoca en el resultado de la votación. Es decir, el resultado final (colectivo) de una votación puede contradecir las preferencias individuales de la mayoría de los votantes.

Existen ciertas condiciones para que la paradoja de Condercet se cumpla. En primer lugar debe haber más de una opción por la que los votantes puedan votar, es decir, partidos políticos y candidatos independientes. La paradoja se materializa cuando analizamos cada una de las opciones de voto de manera binaria, o sea cuando comparamos como en el ejemplo siguiente, las tres opciones de voto por pares. En el cuadro 1 se ejemplifica una estructura de votación que da como resultado la paradoja de Condercet con tres opciones de voto y tres votantes:

| Preferencias cíclicas de Condercet | | | |
|---|---|---|---|
| Opciones\|Votantes | **Votante 1** | **Votante 2** | **Vontante 3** |
| **Primera Opción** | **A** | **C** | **B** |
| **Segunda Opción** | **B** | **A** | **C** |
| **Tercera Opción** | **C** | **B** | **A** |

Cuadro 1. Ejemplo clásico de un ciclo de Condercert. Tomado de http://faculty.georgetown.edu/kingch/Condorcet'sParadoxandArrow'stheoremoverhead.pdf

En filas horizontales están las preferencias de voto y en las columnas los tres votantes. Las opciones de voto se encuentran ordenadas según las preferencias de cada votante. Para simplificar la explicación supongamos que el símbolo matemático mayor o menor que (>ó<) que aprendiste en la secundaria, indica la mayor o menor preferencia del votante por cada opción. Por ejemplo, el votante 1 prefiere más la opción A que la opción B, y más la B que la C. Si reescribimos el cuadro anterior con los símbolos matemáticos antes mencionados, para ahorrar espacio y esfuerzo del autor de este texto, el resultado sería:

**Votante 1 (V1): A>B >C**
**Votante 2 (V2): C >A>B**
**Votante 3 (V3): B>C> A**

Si comparamos las opciones de voto por pares (A y B), sabemos que el votante 1 (V1) y el votante 2 (V2) prefieren A a B y el votante tres 3 (V3) prefiere B a A, entonces la mayoría de nuestro sistema de dos votantes prefiere a A. Ahora, si comparamos la opción perdedora B con la opción faltante C, el votante 1 (V1) y el votante 3 (V3) prefieren B a C y dejan en minoría al votante 2 (V2) que prefiere C. Si la opción A vence a la opción B y la opción B vence a la opción C, podemos concluir que A vence a C. El ganador de las elecciones debería ser A

Sin embargo, esto no ocurre en nuestro sistema; si comparamos A con C directamente, resulta que el votante 2 (V2) y el votante 3 (V3) prefieren C a A (C > A); como resultado de este problema no podemos determinar a un ganador único dadas estas preferencias de los votantes. Llegamos a lo que se conoce como ciclo de Condercet. En este ciclo los tres votantes en conjunto prefieren A a C y C a A consecutivamente, dando pie a un ejercicio infinito en el cual no existe un ganador único. ¿Qué es lo que sucede en este sistema de votación? Lo que sucede es que las preferencias individuales no se transmiten o agregan en forma representativa de la voluntad individual a la colectiva.

## El tamaño sí importa: ¿qué es la transitividad?

La transitividad es una propiedad matemática que puede ser observada en casi cualquier parte de tu vida cotidiana. La transitividad indica la relación que guardan dos objetos con un tercero. Supongamos que tus amigos organizaron un concurso para que puedas escoger un novio, una versión analógica de Tinder. Los tres finalistas te parecen igualmente atractivos con excepción de su estatura. Tú prefieres el chico con la mayor estatura y la única forma de saber quién tendrá la fortuna de tener una cita contigo es comparar a los tres. Sin embargo, tus amigos imponen una restricción al juego, no puedes comparar simultáneamente a los tres finalistas. ¿Qué hacer?

En el dudoso caso de que este ejemplo suceda en la vida real, la transitividad puede sacarte del apuro. No necesitas comparar a los tres chicos al mismo tiempo ya que por transitividad sabes que únicamente necesitas comparar por pares a los participantes para conocer su relación con el tercer concursante. Lo que necesitas es tomar a dos candidatos al azar y compararlos. Supongamos que el chico A es más alto que el chico B. Ahora le dices al chico A que se retire y al candidato faltante C que pase al frente. Al comparar a B y C observas que B es más alto que C. En este caso, sin la necesidad de comparar al candidato A con el candidato C, sabes que existe una relación que permite concluir que A es más alto que C. El chico con quien decidirías salir sería A por ser el más alto de todos, aunque es muy recomendable que no sólo escojas a las personas con quien sales por su estatura.

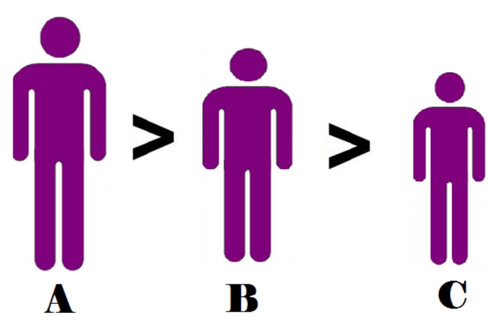


Figura 2. ¿Qué es la transitividad?

La transitividad es una relación binaria (de pares) entre elementos de un mismo conjunto (chicos finalistas) que a su vez se relacionan con un tercero. De tal manera que si comparamos A con B y luego B con C, inmediatamente tenemos una comparación de A con C; siempre y cuando A, B y C pertenezcan al mismo conjunto –novios finalistas–. En general, las propiedades de magnitud (mayor qué ">", menor qué "<" o igual qué "=") son las propiedades transitivas por excelencia, aunque no son las únicas. Veamos un ejemplo numérico para que esto quede claro:

Tenemos un conjunto de tres números: 3, 7, 0. Al comparar por pares (de forma binaria) estos números obtenemos que:

**7 > 3 (Siete es mayor a tres)**

**3 > 0 (Tres es mayor a cero)**

Entonces sabemos por transitividad que:

**7 > 0 (Siete es mayor que cero)**

Puedes pensar que la transitividad es una propiedad obvia y que siempre se cumple. Es decir, siete 7 siempre será mayor que 3; y si 3 siempre es mayor que 0 entonces 7 siempre es mayor que 0. El problema radica en que en la paradoja del voto de Condercet, la propiedad de transitividad, no se cumple. Es decir, pueden existir escenarios en los cuales no podemos saber qué opción de votación –para recuperar el tono del apartado anterior– será definitivamente preferida a las anteriores. Podemos decir que las preferencias individuales de nuestros tres votantes anteriores no son transitivas al momento de ser agregadas en conjunto; es decir, no conservan una relación de preferencia única al momento de analizar el resultado final –social– de la votación. No sabemos con certeza (dadas las preferencias del cuadro 1) quién será el ganador definitivo de nuestras elecciones anteriores. Tenemos un escenario en el cual A y C ganan la elección de forma consecutiva.

## El teorema de imposibilidad de Arrow

John Kenneth Arrow fue capaz de visualizar este fenómeno sin conocer los trabajos previos de Condercet. Al comenzar a analizar el problema del voto, rápidamente se percató del problema que albergaba el sistema de votación de mayorías analizado anteriormente y llegó a la conclusión de que el resultado de cualquier sistema de votación depende crucialmente de los supuestos o axiomas que la sociedad acuerda como deseables para cumplirse.

En ese momento Arrow planteó cuatro axiomas (supuestos) que se suponen altamente deseables en cualquier sistema democrático y comenzó a probar varios modelos de votación para saber cuál de todo ellos era capaz de cumplir con todos los supuestos sin caer en ambigüedades y contradicciones. Los axiomas que Arrow propuso son los siguientes:

1. Decisivo. El resultado de una elección debe arrojar un candidato ganador de manera irrefutable. Es decir, los resultados deben de ser claros y definitorios.
2. Consenso. Si la mayoría de los votantes escogen al candidato A sobre el candidato B, el candidato A debe de ser elegido siempre y cuando se encuentre en la contienda.
3. No debe existir un dictador. Ningún votante –todos los ciudadanos votamos y podemos ser votados– debe ser capaz de manipular la votación para que gane la opción que a él le parezca correcta. Si le gusta la opción A, B o C no debe de ser capaz de lograr que estas opciones ganen las elecciones.
4. Independencia de alternativas irrelevantes. Si la opción A ganó las elecciones, dado el caso hipotético de que alguno de los contendientes, digamos Z, no haya participado en la elección, el candidato A debería seguir ganando las elecciones.

El teorema de imposibilidad de Arrow plantea que en ningún sistema de votación es posible respetar estos cuatro axiomas de manera simultánea. El sentido común nos diría que el postulado que siempre es violado es el tercero. Seamos sinceros, es difícil imaginar un sistema de gobierno democrático o no, donde no existan dictadores capaces de llevar el resultado de la votación hacia sus propias preferencias.

Sin embargo, existen otros supuestos que tampoco se cumplen. Examinemos dos de los sistemas de votación más socorridos en la actualidad: a) regla de mayorías (*majority* rules) y b) regla de pluralidad (*plurality rules*).

En el caso de los sistemas de votación mayoritarios –como el presentado en la primera sección– la regla que no necesariamente se cumple es la concerniente a que el resultado debe de ser decisivo.

Dentro del sistema de pluralidad –que es el que se utiliza para elegir senadores y diputados en Estados Unidos y Reino Unido– la regla que generalmente no se cumple es la de independencia de las opciones irrelevantes. Supongamos una tabla de votaciones como la que sigue:

| Resultados votación de mayoría de pluralidad | | |
|---|---|---|
| 40% | 35% | 25% |
| A | B | C |

Figura 3.Tomado de *The Arrow Impossibility Theorem: Where do We Go From Here.* Eric Maskin, 2008.

En este sistema de votación el vencedor es el candidato que mayor número de votantes coloca en primer lugar. Es decir, los votantes colocan en primer lugar –independientemente de la posición de los otros dos candidatos– al candidato A con un 40%, al candidato B con un 35% y al candidato C con un 25%. Supongamos que el candidato B es de izquierda, el candidato A de derecha y el candidato C es neutral pero muchas personas con tendencias de izquierda decidieron votar por él. En el caso de que C  se retire de la contienda, es posible que más de la mitad de las personas que votaron por esta opción decidan votar por B, incluyendo a las personas que en caso de que C se retire, no votarían.

En este caso, B ganaría las elecciones con un 47.5% de la votación total. El resultado final de la contienda se ve modificado y el supuesto de independencia de alternativas irrelevantes no se cumple.

**¿Puede la democracia estar en un error?**

Lo expuesto en este escrito es uno de los tantos matices que enriquecen el ejercicio político y electoral de un país. Básicamente el propósito de este ejercicio es acercarte un poco a las inmensas posibilidades de participación política y ciudadana en este país, ya sea a través de la vía partidista o de la organización de la sociedad civil y las candidaturas independientes.

La importancia de presentarlo no únicamente como un tema de moda electoral, sino de verlo  con conocimiento y conciencia va más allá de ir a votar. Las necesidades actuales de nuestro país exigen una concientización activa de la sociedad civil (tú, yo y todos aquellos que no militamos en un partido político). Esta postura activa ante el contexto político actual únicamente es eficaz si se encuentra organizada e informada.

En las últimas elecciones intermedias de 2015, para elegir a la Cámara de Diputados, la Cámara de Senadores y algunos gobernadores, únicamente el 47.03% de toda la población que podía votar lo hizo. Más que preguntarnos si el sistema democrático está bien o mal, deberíamos preguntarnos cómo podemos ejercer el derecho al voto y muchos otros más para mantener o cambiar las decisiones y acciones de las personas que nos representan institucionalmente.

Los cuatro axiomas expuestos con anterioridad pueden ser expresados como propiedades de conjuntos matemáticos. Una forma de demostrar el teorema de imposibilidad de Arrow es suponer la existencia simultánea de los cuatro supuestos y derivar una contradicción. Aquellas y aquellos audaces pueden ver la demostración formal aquí:
http://www.tulane.edu/~dnelson/COURSES/IntroPE/arrow.pdf

## Bibliografía


- Eric Maskin, *The Arrow Impossibility Theorem: Where do We Go From Here.* 2008.
- http://faculty.georgetown.edu/kingch/Condorcet'sParadoxandArrow'stheoremoverhead.pdf
- Participación electoral en 2015. Consultado el 08 de octubre de 2015 en http://mexico.cnn.com/infografias/2015/06/09/participacion-electoral-en-2015