Pruebas y demostraciones

Santiago Domínguez Zermeño

¿Qué es una demostración matemática? El término no le resultará ajeno a la mayoría de los lectores, quizás para algunos la respuesta sea clara. Por pura curiosidad les pedí a mis padres (mi madre es economista, mi padre sociólogo) que me definieran qué creían ellos que era una demostración matemática.

"Pues cuando tienes un fenómeno social o un experimento científico que necesitas explicar, una demostración matemática te dice con matemáticas por qué sucede", dijo ella, a lo que mi papá asintió y corroboró diciendo: "Una demostración matemática te prueba con matemáticas la hipótesis de tu experimento".

En realidad a eso no nos referimos los matemáticos cuando hablamos de demostraciones, pero no me sorprendió su respuesta. La demostración matemática, una noción tan importante y básica dentro de las matemáticas y de la práctica matemática, es en realidad poco comprendida fuera de ese ámbito. Es esto lo que me motiva a explicar qué es una demostración matemática y por qué es tan importante.

Se puede decir de la manera más simple posible que una demostración matemática es un argumento que muestra la veracidad de un enunciado matemático mediante deducciones lógicas a partir de enunciados previamente conocidos y aceptados. Imaginemos una teoría matemática como un edificio hecho de proposiciones y teoremas. Una proposición es una expresión susceptible de tomar valores de verdad y un teorema es una afirmación que puede ser demostrada. Un ejemplo de una proposición es: "La recta k pasa por el punto x". Es claro que puede o no ser cierta. Por otro lado un ejemplo de teorema es: "Los ángulos internos de todo triángulo suman 180 grados".

Pensemos en este edificio como una construcción a la que se le agregan pisos día a día. Así, cada bloque agregado es un nuevo teorema cuya verdad depende de todos los bloques colocados previamente. Los bloques que sirven de base a todo el edificio no dependen de ningún otro y son los axiomas de la teoría: son proposiciones que damos por verdaderas y no probamos. En esta analogía los bloques se agregan mediante inferencias lógicas. Todo el edificio se deduce lógicamente a partir de los axiomas.

Supongamos ahora que tenemos un nuevo teorema para nuestra teoría. Para agregarlo hace falta *demostrarlo.* Esto es, mostrar explícitamente los teoremas y proposiciones previas de las que partiremos para deducirlo, así como las reglas de inferencia lógica con las que lograremos demostrarlo. En nuestra analogía esto equivale a mostrar los bloques sobre los que vamos a construir y explicar por qué decidimos poner el nuevo bloque sobre ellos.

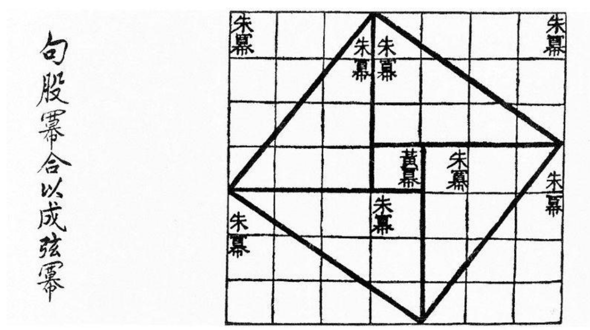
Si un teorema es demostrado, tenemos la certeza de que, al menos para esa teoría matemática, el teorema es verdadero. Lo que no quiere decir que sea verdad siempre. Si cambiamos de teoría (si en nuestra analogía cambiamos de edificio), cambiarán las reglas de inferencia y los axiomas. Como resultado nuestro teorema podrá no ser verdadero o carecer incluso de significado.

Hasta ahora he hecho un pequeño esbozo sobre lo que constituye un teorema dentro de una teoría matemática. Es en este contexto que podemos hablar de una demostración matemática, la cual resulta ser absolutamente necesaria en la práctica matemática: sin ella no podríamos tener la certeza de que lo que estamos diciendo es verdad.

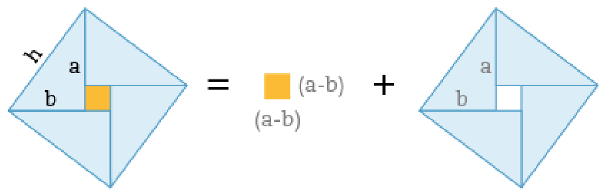
¿Por qué se empezó a demostrar?

Es difícil saber con certeza dónde se originó la primera demostración. Si pensamos en las demostraciones como un argumento con el cual se busca convencer a alguien sobre la veracidad de una aseveración matemática, podemos ver que varias de las civilizaciones antiguas ya contaban con algunas demostraciones rudimentarias. Con esto me refiero a que no eran muy rigurosas. Muchas veces probaban cosas de manera indirecta o usando analogías, o simplemente confiando que alguna proposición sería universalmente cierta, en virtud de que lo ha sido en muchas ocasiones distintas.

Recordemos el teorema de Pitágoras: en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa ($a^2+b^2=c^2$). Para muchas civilizaciones antiguas este era un hecho conocido. Los babilonios, por ejemplo, tenían tablas con ejemplos de triángulos que cumplían esta propiedad, las usaban en sus construcciones y edificaciones. Sin embargo, la primera demostración rigurosa se atribuye a Pitágoras, un griego que vivió en el siglo VI a.C. Hay otras demostraciones antiguas, como la que se encuentra en el manuscrito chino Chou Pei Suan Ching:



Esta demostración geométrica data aproximadamente del siglo III a.C. El argumento que sigue es básicamente el siguiente:



$$h^2 = (a-b)^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$= a^2 + b^2$$

Es interesante mencionar que las demostraciones pueden ser distintas: unas son visuales y geométricas (como la china) y otras usan argumentos algebraicos y numéricos. De hecho este teorema específico es probablemente el más diversamente demostrado. Hay libros enteros dedicados a mostrar distintas pruebas del mismo.

Podemos ahora pensar que desde hace más de dos milenios, las demostraciones matemáticas ya existían. Pero para poder afirmar esto debemos ser algo flexibles con la definición de demostración. En sentido estricto, muchas de las pruebas de la época eran demostraciones *informales*. Con esto me refiero a que la mayoría de las demostraciones no eran rigurosas o estrictas de acuerdo a la definición actual de demostración. Pero esto es lógico, al fin y al cabo estamos hablando de tiempos distintos, de conceptos y filosofías distintas. Lo importante es notar que muchas de estas demostraciones no son estrictas porque no fueron hechas dentro de un sistema lógico y axiomático que podamos llamar teoría matemática. Es por esto que decimos que no son pruebas formales. ¿Cómo demostraban entonces? Por lo general partían de hechos que se daban por verdaderos, y se valían de argumentos para intentar mostrar la veracidad de lo que afirmaban; aunque muchos de estos argumentos eran analogías o experimentos mentales que debían mostrar la necesidad de veracidad del teorema.

Hacia las demostraciones modernas

La tradición matemática moderna, como muchas de las tradiciones del saber occidental, se gestó en la antigua Grecia. Fue ahí donde se empezaron a trabajar las matemáticas como un sistema axiomático con reglas lógicas, proposiciones y demostraciones. Una de las muestras más claras de esto es el monumental tratado matemático *Los Elementos* escrito por Euclides por el año 300 a.C. Su relevancia es importantísima en el contexto del desarrollo de las matemáticas pues se trata de una recopilación del saber matemático de la época. En él Euclides construyó un sistema con definiciones, axiomas y proposiciones, y fue demostrando sistemáticamente los principales resultados conocidos, sobre todolos relacionados con lateoría de números y con la geometría. Durante muchos siglos *Los Elementos* fue la segunda obra más editada y publicada (sólo después de la Biblia) y su estudio era obligatorio en las universidades. Puede considerarse el libro de texto más exitoso e influyente de la historia.

Con la exhaustiva formalización el método deductivo matemático, los 13 libros que conforman a *Los Elementos* establecieron una tradición que habría deinfluir fuertemente en el desarrollo de la ciencia en general, siendo la demostración matemática una parte clave esta tradición. ¿Habría tenido el mismo impacto Euclides si tan sólo hubiera enumerado sin demostrar los resultados matemáticos conocidos en su época? Indudablemente no. *Los Elementos* trascendieron porque lograron estructurar el conocimiento de manera lógica, estableciendo relaciones causales entre proposiciones matemáticas. En esto radica la importancia de la demostración matemática: nos muestra la necesidad de nuestras afirmaciones, a la vez que nos enseña cómo es que éstas se relacionan con todas las demás proposiciones y teoremas del sistema. Al decir que nos muestra su necesidad no hablo de su utilidad: me refiero a su inevitabilidad.

Demostrar como arte

I am interested in mathematics only as a creative art.

G. H. Hardy

Durante muchos siglos, el estudio de la matemática y de la lógica fue parte fundamental de la educación superior. La matemática, la filosofía y la teología iban de la mano, por ello no faltaban las demostraciones lógicas de la existencia de Dios. Hoy en día las matemáticas son consideradas una herramienta auxiliar en muchas áreas del conocimiento. Y esto no está mal: en verdad lo son. El problema radica en que en muchas ocasiones se comprenden como si fueran *solamente* eso. Se ha fallado en mostrar la relevancia que tienen *por sí mismas* como una de las construcciones más sofisticadas del conocimiento humano. Y uno de los síntomas más claros de esto es la falta de entendimiento de las demostraciones matemáticas.

Es cierto que demostrar puede ser muy complicado. A mi parecer, una de las dificultades inherentes a las demostraciones matemáticas es el lenguaje y desarrollo tan particular que tienen. Para alguien que está empezando a adentrarse en el ámbito matemático resulta muy complicado entender todos los pasos lógicos muchas veces no presentados de manera explícita, que van construyendo a la demostración. En general, lograr entender y hacer demostraciones matemáticas requiere de práctica y estudio constante.

Pero para la mayoría de los matemáticos que sea difícil lograr demostrar algo en las matemáticas no hace sino volverlas más atractivas: lograr llegar a un resultado importante se vuelve un verdadero reto. Se requiere mucha disciplina, paciencia y capacidad para poder tener todo el conocimiento que se requiere, además de mucho talento, creatividad e inspiración para poder hacer uso de éste. Hay que pensar profundamente, tender puentes entre ideas, sacar conclusiones. Una demostración matemática verdaderamente bella es aquella que logra relacionar conceptos profundos y ricos, y que a su vez se muestra como algo simple, aun cuando detrás lleva un grandísimo trabajo intelectual. La matemática es una actividad profundamente creativa.

Todo esto, su carácter abstracto e intangible y su belleza subjetiva hacen que una buena demostración pueda ser considerada un arte. La necesidad innegable de sus resultados, la aparente perfección de sus sistemas, su ilimitado universo geométrico, sus infinitos elementos... hay grandes razones para quedar asombrados ante la matemática. Y en el corazón de todo ello, están las demostraciones.

Bibliografía

1. Roger B. Nelsen, *Demostraciones sin palabras,* Proyecto Sur de Ediciones, España, 2001
2. Polya, George*, Mathematics and Plausible Reasoning,* Princeton University Press, EUA, 1990
3. Lakatos, Imre, *Pruebas y Refutaciones,* Alianza Universidad, España, 1982
4. Aigner, Martin, *Proofs from THE BOOK,* Springer, Berlin, 2001
5. Doxiadis, Apostolos, *Logicomix,* Bloomsbury, EUA, 2009

Sitios de interés

1. http://blog.matthen.com